

انتگرال معین

تفسیر ریاضی صواب در بیان شکل

معین زیر تابع f بر بازه $[a, b]$ بر حسب f ، اگر $f'(x) = f(x)$ ، آنگاه

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

نکته: نتایج ثابت انتگرال برای درجه اول انتگرال معین تیری دارد. برای اگر $f(x)$ تابع

دارد $f(x) + C$ در تمام حوزم ثابت،

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x) + C] \Big|_{x=a}^{x=b} = [F(b) + C] - [F(a) + C] = F(b) - F(a)$$

بنابراین عدد $\int_a^b f(x) dx$ بسته به انتخاب تابع و حد دارد.

روش ال جیبی در این مسئله

$$\int_0^1 (rx^r - rx + r) dx = \left[\frac{rx^{r+1}}{r+1} - \frac{rx^2}{2} + rx \right]_0^1 = x^{r+1} - \frac{r}{2}x^2 + rx \Big|_0^1 =$$

$$(1 - r + r) - (0 - 0 + 0) = 1$$

$$\begin{aligned} \int_0^r (rx+1)^{\frac{1}{r}} dx &\rightarrow \frac{1}{r} \int \underbrace{(rx+1)^{\frac{1}{r}}}_{u} \underbrace{r dx}_{du} = \frac{1}{r} \int u^{\frac{1}{r}} du = \frac{1}{r} \frac{u^{\frac{1}{r}+1}}{\frac{1}{r}+1} = \frac{1}{r} \sqrt[r]{(rx+1)^{r+1}} \Big|_0^r \\ &= \frac{1}{r} (r^r)^{\frac{r}{r}} - \frac{1}{r} = \frac{r^2}{r} = \frac{1}{r} \end{aligned}$$

$$rx+1 = u \rightarrow r dx = du$$

خواص انتگرال معین

معیناً نتایج درجه $[a, b]$ بر مبنای δ

$$\text{الف) } \int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$$

$$\text{ب) } \int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$$

$$\text{ج) } \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

$$\text{د) } \int_a^a f(x) dx = 0$$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

ث) $c \in [a, b]$

المسألة [0,1] حيث $f(x) = \begin{cases} x^{r+1} & 0 \leq x \leq 1 \\ rx + r & 1 < x \leq r \end{cases}$ حيث r عدد صحيح موجب

$$\mathcal{L} f(x) = \mathcal{L} f(x) = f(1) = 1$$

$x \rightarrow 1^- \quad x \rightarrow 1^+$

حيث f رتبة [0,1] مستمرة، r عدد صحيح موجب

حيث f مستمرة عند $x=1$ ، r عدد صحيح موجب

$$\int_0^r f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx + \int_1^r f(x) dx = \int_0^1 (x^{r+1}) dx + \int_1^r (rx + r) dx$$

$$= \frac{x^{r+2}}{r+2} + rx \Big|_0^1 + \left(\frac{rx^2}{2} + rx \right) \Big|_1^r = \left[\left(\frac{r^2}{2} + 1 \right) - 0 \right] + \left[(r^2 + r) - (r + r) \right]$$

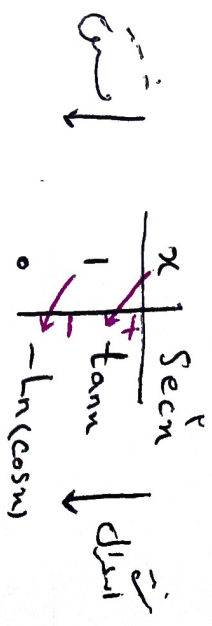
$$= \frac{r^2}{2}$$

مثال: اشتقاق $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sec^2 u \, du$ را بیابید.

$$\int x \sec^2 u \, du = x \tan u + \ln |\cos u| + C$$

$$\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sec^2 u \, du = x \left[\tan u + \ln |\cos u| \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$\left(\frac{\pi}{2} \cdot \cancel{\frac{\pi}{2}} + \ln |\cos \frac{\pi}{2}| \right) - (0 \cdot \cancel{\frac{\pi}{2}} + \ln |\cos 0|) = \frac{\pi}{2} + \ln \frac{\sqrt{2}}{2}$$



مستند

اشد اشتقاق را بیابید.

الف) $\int_0^{\infty} (x^r + \frac{1}{x^r}) \, dx$

ب) $\int_0^r e^{-\frac{r}{x}} \, dx$

$$\text{1) } \int_{-\frac{\pi}{k}}^{\frac{\pi}{k}} \sin^r x \, dx$$

$$\text{2) } \int_1^r \frac{dx}{x^{n+1}}$$

$$\text{3) } \int_{-r}^r \frac{dx}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

$$\text{4) } \int_0^{\frac{\pi}{k}} \sec(rx) \tan(rx) \, dx$$

$$\text{5) } \int_1^r x^{\frac{r}{k}} \ln(rx) \, dx$$

$$\text{6) } \int_0^{\frac{\pi}{k}} \frac{\sin x}{\cos^r x} \, dx$$

$$\text{7) } \int_{-a}^1 |n+r| \, dx$$

میری، رشید الہادی، ریاضی

$$\text{8) } \int_0^r \frac{x \ln(x^r + 1)}{x^r + 1} \, dx$$

$$\text{9) } \int_0^{\frac{\pi}{k}} \cos^r x \, dx$$

$$* \int_1^{\infty} (x^r + \frac{1}{x^r}) dx = \frac{x^r}{r} - \frac{1}{x} \Big|_1^{\infty} = (\frac{\infty^r}{r} - \frac{1}{\infty}) - (\frac{1^r}{r} - \frac{1}{1})$$

$$* \int_0^r e^{-\frac{r}{r}} x \, dx = \frac{1}{-\frac{r}{r}} e^{-\frac{r}{r} x} \Big|_0^r = -\frac{r}{r} e^{-\frac{r}{r}(r)} - (-\frac{r}{r} e^{-\frac{r}{r}(0)}) = -\frac{r}{r} e^{-r} + \frac{r}{r}$$

$$\begin{aligned} * \int_{-\frac{\pi}{r}}^{\frac{\pi}{r}} \sin^r x \, dx &= \int_{-\frac{\pi}{r}}^{\frac{\pi}{r}} \frac{1 - \cos^2 x}{r} \, dx = \frac{1}{r} \int_{-\frac{\pi}{r}}^{\frac{\pi}{r}} (1 - \cos^2 x) \, dx \\ &= \frac{1}{r} (x - \frac{1}{r} \sin^2 x) \Big|_{-\frac{\pi}{r}}^{\frac{\pi}{r}} = \frac{1}{r} \left[\left(\frac{\pi}{r} - \frac{1}{r} \sin^2 \frac{\pi}{r} \right) - \left(-\frac{\pi}{r} - \frac{1}{r} \sin^2 \left(-\frac{\pi}{r} \right) \right) \right] \\ &= \frac{1}{r} \left[\frac{\pi}{r} - \frac{1}{r} + \frac{\pi}{r} + \frac{1}{r} (-1) \right] = \frac{1}{r} \left[\frac{\pi}{r} - 1 \right] = \frac{\pi}{r} - \frac{1}{r} \end{aligned}$$

$$\cos^2 x = 1 - r \sin^2 x \quad \rightarrow \quad r \sin^2 x = 1 - \cos^2 x \quad \rightarrow \quad \sin^2 x = \frac{1 - \cos^2 x}{r}$$

$$\sin \frac{\pi}{r} = 1$$

$$\sin \left(-\frac{\pi}{r} \right) = -\sin \frac{\pi}{r} = -1$$

$$\begin{aligned}
 * \quad \int_1^r \frac{du}{r_{n+1}} &\rightarrow \frac{1}{r} \int \frac{\overbrace{r du}^{du}}{\underbrace{r_{n+1}}_u} = \frac{1}{r} \int \frac{du}{u} = \frac{1}{r} \ln|u| = \frac{1}{r} \ln|r_{n+1}| \\
 &\rightarrow \frac{1}{r} \ln|r| - \frac{1}{r} \ln|K|
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 r_{n+1} &= \frac{u}{r} \\
 r du &= du
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 * \quad \int_{-r}^r \frac{du}{\sqrt{r^2 - u^2}} &= \int_{-r}^r \frac{du}{\sqrt{r^2 - u^2}} = \text{ArcSin} \frac{u}{r} \Big|_{-r}^r = (\text{ArcSin}(1)) - (\text{ArcSin}(-1))
 \end{aligned}$$

$$\text{Sin} \frac{rK}{r} = -1 = \text{Sin}(-\frac{\pi}{2})$$

$$\text{Sin} \frac{K}{r} = 1$$